Die Vermeidung eines Schutzringes bei der Messung der Wärmeleitfähigkeit plattenförmiger Körper

Schmidt, Ernst

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 4, 1952,
S. 176-180

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Die Vermeidung eines Schutzringes bei der Messung der Wärmeleitfähigkeit plattenförmiger Körper

Von **Ernst Schmidt**, Braunschweig

Mit 3 Abbildungen

Avoiding the guard ring at heat conductivity measurements in plates: For measuring the heat conductivity of solid materials in form of plates the real heater has to be surrounded by a guard ring to obtain a parallel flow of heat and a constant gradient of temperature in the material. The guard ring has to be heated up to the same temperature as the heater by gradually altering the electric current until equality of temperature is attained. This is rather tedious and takes much time. If the guard ring is omitted the isothermes change to curved surfaces, and the heat conductivity of the material can no more be determined in the simple way from the difference of temperature and the heat flow per unit area entering the material.

By theoretical investigation it is shown, that also without a guard ring exact measurements of heat conductivity are possible if the curvature of the isothermes is determined by additional measurements of differences of temperature on the surface of the plate in contact with the heater. For this purpose a set of four thermocouples in serie is proposed to get a sufficient exactness of the small temperature difference occured.

Die Wärmeleitfähigkeit fester Stoffe bestimmt man meist an Körpern in Plattenform. Dabei wird eine dünne, mit Hilfe von elektrischen Widerstands-Drähten oder -Bändern gleichmäßig beheizte Platte von in der Regel quadratischer Form beiderseits mit ebenen, gleichstarken Platten des Versuchsmaterials belegt, deren andere Seiten die Wärme an die Umgebung oder an besondere Kühlplatten abgeben. Die Wärmeleitzahl erhält man dann aus der Gleichung

$$q = \lambda \frac{dt}{dz} \tag{1}$$

wobei $q = \frac{Q}{F}$ die Heizdichte gleich dem Verhältnis der elektrischen Heizleistung Q in kcal/h zur Fläche F in m² und $\frac{dt}{dz}$ der Temperaturgradient senkrecht zur Heizplatte ist.

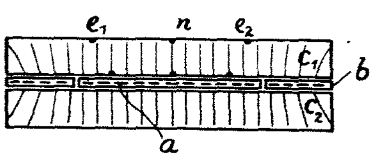

Abb. 1. Wärmestromlinien bei der Wärmeleitmessung mit Schutzring.

Die Heizdichte läßt sich genügend genau konstant halten über Flächen von der Größenordnung 25 cm × 25 cm, wie sie etwa bei solchen Untersuchungen benutzt werden, und der Temperaturgradient wird aus dem Temperaturunterschied Δt zu beiden Seiten der Versuchsplatten und ihrer Dicke δ bestimmt.

Um den für dieses Verfahren notwendigen konstanten Gradienten des Temperaturfeldes über den ganzen Meßbereich der Versuchsplatten zu erhalten, muß man, wie Abb. 1 zeigt, um den eigentlichen Meßheizkörper a noch einen zweiten Heizkörper b legen in Gestalt eines meist quadratischen Schutzringes, der auch noch von den Versuchsplatten c_1 und c_2 überdeckt wird und der die Randstörungen von der Meßzone fernhält. Heizt man den Schutzring auf dieselbe Temperatur wie den Meßheizkörper, so herrscht im Bereich des letzteren ein gleichmäßiges Temperaturfeld, wie das die in der Abbildung gezeichneten Wärmestromlinien andeuten.

Dieses Verfahren hat den Nachteil, daß die richtige Einstellung der Heizung des Schutzringes, die man etwa durch die Gleichheit der Temperaturen an den Stellen e_1 und e_2 einerseits und in der Mitte der Meßplatte bei n andererseits feststellt, ziemlich lange dauert. Außerdem erfordert der Schutzring zusätzliche Heizleistung, die besonders bei Messungen im Bereich hoher Temperaturen schon ins Gewicht fällt.

Im folgenden wird gezeigt, daß man auch ohne Schutzring genügend genaue Messungen erzielen kann. In Abb. 2 ist a der quadratische oder kreisförmige Meßheizkörper und c_1 und c_2 sind die ihn beiderseits bedeckenden Versuchsplatten gleicher Größe. Das Ganze wird zweckmäßig in einen Isolierstoff i eingebettet, der in der Abbildung durch Punktierung angedeutet ist. Das Temperaturfeld ist kein gleichmäßiges mehr, sondern entspricht etwa den in Abb. 2 in die Meßplatte c_1 eingezeichneten Isothermen und Wärmestromlinien. Man kann auch in diesem Falle noch richtig messen, wenn man den Temperaturverlauf längs der Linie $\overline{mn}$ durch genügend viele Messungen bestimmt und daraus den Temperaturgradienten an der Stelle m ermittelt. Aber das erfordert Messungen an in ihrer Lage genau bestimmten Punkten in Bohrungen der Versuchsplatte, die sich besonders bei harten Körpern nur schwer genau genug herstellen lassen.

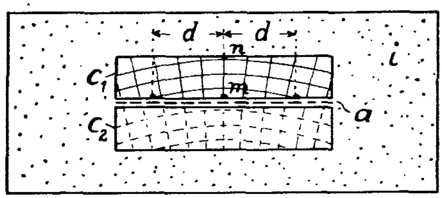

Abb. 2. Isothermen und Wärmestromlinien ohne Schutzring (gestrichelt: analytische Fortsetzung nach unten).

Man kann aber den Temperaturgradienten an der Stelle m auch aus Messungen allein an der Oberfläche der Versuchsplatte ermitteln. Um das zu zeigen, entwickeln wir das Temperaturfeld in c_1 nach einer dreidimensionalen Potenzreihe von der Form

$$t = \sum a_{ijk} x^i y^j z^k , \tag{2}$$

wobei x, y, z rechtwinklige Koordinaten sind, von denen x und y in der Heizebene und z senkrecht dazu liegen.

Um für alle a_{ijk} die gleiche Dimension wie für t, also Grad Celsius zu erhalten, wollen wir alle Koordinaten-Angaben x, y, z und ebenso die Plattendicke δ sowie die später zur Angabe der Lage der Thermoelemente benutzte Strecke d als dimensionslose Zahlen einführen, indem wir die Längen durch die benutzte Längeneinheit oder durch die Kantenlänge des Quadrates der Platte dividieren.

Ausgeschrieben lautet die Summe (2)

$$t = \begin{Bmatrix} a_{000} + a_{100}x + a_{200}x^2 + \cdots \\ a_{010}y + a_{110}xy + a_{210}x^2y + \cdots \\ a_{020}y^2 + a_{120}xy^2 + a_{220}x^2y^2 + \cdots \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{Bmatrix} + z \cdot \begin{Bmatrix} a_{001} + a_{101}x + a_{201}x^2 + \cdots \\ a_{011}y + a_{111}xy + a_{211}x^2y + \cdots \\ a_{021}y^2 + a_{121}xy^2 + a_{221}x^2y^2 + \cdots \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{Bmatrix}$$

$$+ z^2 \cdot \begin{Bmatrix} a_{002} + a_{102}x + a_{202}x^2 + \cdots \\ a_{012}y + a_{112}xy + a_{212}x^2y + \cdots \\ a_{022}y^2 + a_{122}xy^2 + a_{222}x^2y^2 + \cdots \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{Bmatrix} + z^3 \cdot \begin{Bmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{Bmatrix} \tag{3}$$

wobei wir uns für jede Koordinate auf das Hinschreiben von nur drei Gliedern beschränkt haben. Nehmen wir als Versuchskörper zwei Platten gleicher Dicke von quadratischer Form und behalten auch für die Isolierung quadratische Symmetrie und Spiegelbildlichkeit zur Heizplatte bei, so muß t offenbar eine gerade Funktion von x und von y sein; somit fallen alle Glieder mit ungeraden Potenzen von x und y fort. Da die x- und y-Achsen vertauschbar sind, sind die Koeffizienten symmetrisch zur Hauptdiagonale einander gleich und die Reihe vereinfacht sich zu

$$t = \begin{cases} \quad a_{000} + a_{001}z + a_{002}z^2 \\ + (a_{200} + a_{201}z + a_{202}z^2)(x^2 + y^2) \\ + (a_{220} + a_{221}z + a_{222}z^2)\, x^2 y^2 \end{cases} \tag{4}$$

wenn wir uns auch in z auf drei Glieder der Reihe beschränken. Während bei x und y die Glieder der dritten Potenz aus Symmetriegründen verschwinden, ist das für z nicht der Fall, da das Temperaturfeld in der x, y-Ebene Quellen hat. Die analytische Fortsetzung des quellenfreien Feldes der Versuchsplatte c_1 in die Platte c_2 hinein ist deshalb nicht symmetrisch, sondern etwa von der in Abb. 2 gestrichelt eingezeichneten Form. Trotzdem wollen wir uns auch für das Feld als Funktion von z auf drei Glieder der Reihe beschränken. Damit wird der Temperaturverlauf längs der Linie $\overline{mn}$ also für $x = 0$ und $y = 0$ durch die Parabel

$$t = a_{000} + a_{001}z + a_{002}z^2 \tag{5}$$

angenähert, wobei $a_{000} = t_m$ die Temperatur im Punkte m ist, und

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)_{z=0} = a_{001}$$

dem Temperaturgradienten $\frac{dt}{dz}$ in Gl. (1) entspricht.

Zur Bestimmung der beiden Konstanten a_{001} und a_{002} brauchen wir außer der Temperaturmessung in n noch eine Messung im Innern der Versuchsplatte zwischen den Punkten m und n, die aus den schon erwähnten Gründen ihre Schwierigkeiten hat, und die wir vermeiden wollen. Die Temperaturmessung in n bei $z = \delta$ liefert aber immerhin eine Gleichung

$$t_n = t_m + a_{001}\delta + a_{002}\delta^2 \tag{6}$$

für die beiden Unbekannten a_{001} und a_{002}, von denen in unserem Falle die erste eine negative, die zweite eine positive Größe ist.

Die noch fehlende zweite Gleichung erhalten wir aus der Differentialgleichung des quellenfreien Temperaturfeldes

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 \tag{7}$$

bei stationärer Wärmeströmung.

In der Nähe des Koordinatenursprunges, also für $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$, ergibt sich aus Gl. (5)

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 2 a_{002} \tag{8}$$

und aus 4 erhält man ebenfalls für $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 2 a_{200}\,. \tag{8a}$$

Daraus folgt von Hilfe von Gl. (7)

$$a_{002} = -2 a_{200}, \tag{9}$$

womit a_{002} auf die Konstante a_{200} zurückgeführt ist, die sich nach Gl. (8a) allein aus Messungen in der Ebene $z = 0$, also ohne Anbohren des Versuchskörpers bestimmen läßt.

Nach Gl. (4) gilt für den Temperaturverlauf in der Ebene $z = 0$ längs der x-Achse und der y-Achse

$$t_x - t_m = a_{200}\, x^2 \text{ bzw. } t_y - t_m = a_{200}\, y^2 \tag{10}$$

und man kann a_{200} aus der Messung dieses Temperaturunterschiedes für ein gegebenes $x = d$ oder $y = d$ ermitteln. Um beide Koordinaten y und x ebenso wie deren positive und negative Richtung in gleicher Weise zu berücksichtigen, kann man z. B. vier hintereinander geschaltete Thermoelemente nach Abb. 3 in der Ebene $z = 0$ so anordnen, daß die kalten Lötstellen sich an den Stellen $x = 0$, $y = \pm d$ und $y = 0$, $x = \pm d$ befinden, während die warmen Lötstellen bei $x = 0$, $x = 0$ sitzen. Ein Viertel der so gemessenen Thermokraft entspricht dann dem Mittelwert der Differenz der Temperatur t_m im Ursprung und der vier Temperaturen t_d im Abstande d davon, und Gl. (10) liefert

$$a_{200} = -\frac{t_m - t_d}{d^2}, \tag{11}$$

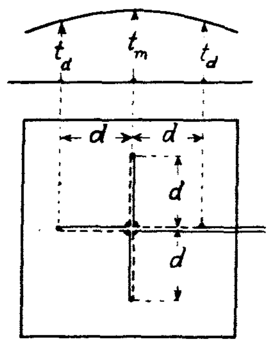

Abb. 3. Anordnung der Thermoelemente zur Messung der Temperaturdifferenz $t_m - t_d$.

was in unserem Falle eine negative Größe ist. Mit Hilfe von Gl. (9) wird dann

$$a_{002} = 2\frac{t_m - t_d}{d^2}$$

ein positiver Wert. Für den Koeffizienten a_{001} ergibt sich aus Gl. (6)

$$a_{001} = \frac{t_n - t_m}{\delta} - a_{002}\delta = -\frac{t_m - t_n}{\delta} - 2\frac{t_m - t_d}{d^2}\delta \tag{12}$$

und die Reihe (5) lautet damit

$$t = t_m - \left(\frac{t_m - t_n}{\delta} + 2\frac{t_m - t_d}{d^2}\delta\right) z + 2\frac{t_m - t_d}{d^2} z^2, \tag{13}$$

woraus sich für $z = 0$ die Neigung

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)_{z=0} = -\frac{t_m - t_n}{\delta} - 2\frac{t_m - t_d}{d^2}\delta \tag{14}$$

ergibt. Diese Neigung in Gl. (1) eingesetzt, führt die Wärmeleitzahl bei der Messung ohne Schutzring auf die Wärmestromdichte und die Temperaturen t_m, t_n und t_d zurück, die an den beiden Oberflächen $z = 0$ und $z = \delta$ der Versuchsplatte gemessen werden können.

Noch um ein Geringes besser wird die Meßgenauigkeit, wenn man statt der quadratischen Versuchsplatten kreisförmige verwendet mit kreisförmiger Heizplatte und kreissymmetrischen Wärmeabgabeverhältnissen.

In diesem Falle haben wir als Koordinaten nur den Radius r und die Höhe z und die dreidimensionale Reihe (4) vereinfacht sich zu der zweidimensionalen

$$t = (b_{00} + b_{01}z + b_{02}z^2) + (b_{20} + b_{21}z + b_{22}z^2)r^2; \tag{15}$$

an Stelle von Gl. (7) tritt die Differentialgleichung

$$\frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0, \tag{16}$$

die für $r = 0$, $z = 0$ ganz entsprechend der Gl. (9) die Beziehung

$$b_{02} = -2b_{20}$$

liefert. Bezeichnet man wieder mit t_m und t_n die Temperaturen an den Punkten m und n und mit t_d die Temperatur in der Ebene $z = 0$ im Abstande d vom Ursprung, so gelten die Gl. (13) und (14) auch hier.

Die Genauigkeit ist im kreissymmetrischen Fall etwas größer als im quadratischen, bei dem die Krümmung der Isothermenflächen in Richtung der Diagonalen des Quadrates eine etwas andere ist, als in den Koordiantenrichtungen x und y, für die wir die Krümmung gemessen hatten. Da die meisten Versuchskörper leichter in quadratischen als in kreisförmigen Platten zu haben sind, wird man in der Regel die quadratische Form vorziehen. Man kommt der Kreissymmetrie aber auch schon sehr nahe, wenn man den Kreis durch ein reguläres Sechseck oder Achteck ersetzt, was für den Bau der Heizplatte und die Herstellung der Versuchskörper bequemer ist als die Kreisform.